<u>Grundlagenskript Mathematik der FOS/BOS Krumbach</u>

Mathematische Grundlagen vor dem Eintritt in die 11. Klasse FOS / 12. Klasse BOS

Liebe Schülerinnen und Schüler,

vor dem Eintritt in die 11. Klasse FOS / 12. Klasse BOS stellt sich vor allem im Fach Mathematik oft die Frage, was als Voraussetzung für einen guten Start in den ersten Schulwochen an Vorkenntnissen mitzubringen ist. Vieles, was Sie in Ihrer Schulzeit bisher gelernt haben, werden Sie auch an unserer Schule wieder benötigen, um die Herausforderungen des Faches zu bewältigen. Da aber der früher einmal beherrschte Unterrichtsinhalt ohne ständiges Wiederholen sehr leicht vergessen wird, soll Ihnen dieses Grundlagenskript dabei helfen, möglicherweise in Vergessenheit geratene Grundlagen wieder aufzufrischen. Außerdem ist sowohl ein Prüfungsteil der Fachabiturprüfung als auch der Abiturprüfung <u>ohne</u> Hilfsmittel, d.h. <u>ohne</u> Taschenrechner und Merkhilfe, zu bearbeiten. Deswegen sollten v.a. die grundlegenden Rechenfertigkeiten problemlos beherrscht werden.

Dieses Grundlagenskript ist in 7 Themenbereiche eingeteilt, die sich jeweils wie folgt untergliedern:

1. Kurze Zusammenfassung der entsprechenden Inhalte und Regeln.
2. Verdeutlichung durch bereits gelöste Musteraufgaben.
3. Zusätzliche Übungsaufgaben mit Lösungen am Ende eines Themengebietes, um das Wiederholte nochmals selbstständig anzuwenden.

Sie sollten sich vor Beginn des Schuljahres zum Durcharbeiten dieses Grundlagenskripts ausreichend Zeit nehmen und Ihre Kopfrechenfertigkeit testen, indem Sie für die Bearbeitung aller Aufgaben keinen Taschenrechner benutzen. Dadurch wird Ihnen der Start in das neue Schuljahr sicherlich erleichtert.

1. Bruchrechnen

1.1 Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Definition: Brüche heißen gleichnamig, wenn sie denselben Nenner haben.

Rechenregel: Gleichnamige Brüche werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man die Zähler addiert (bzw. subtrahiert) und den Nenner beibehält.

Beispiel: $\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}$

Der unechte Bruch $\frac{10}{4}$ lässt sich auch als gemischte Zahl $2\frac{2}{4}$ oder $2\frac{1}{2}$ schreiben. Dies ist mathematisch zwar korrekt und Sie sind es aus der Mittelstufe so gewohnt. Dies führt aber immer wieder zu Missverständnissen und Rechenfehlern, da man fälschlicherweise $2\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}$ als $2\cdot\frac{1}{2}=1$ interpretieren könnte. Daher sollten Sie künftig auf die Angabe von gemischten Zahlen verzichten.

Ergebnisse müssen vollständig gekürzt werden:

$$\frac{10}{4}=\frac{5\cdot\cancel{2}}{2\cdot\cancel{2}}=\frac{5}{2}$$

Übungsaufgaben: Berechnen und kürzen Sie Ihr Ergebnis vollständig.

1) $\frac{3}{4}-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=$

2) $\frac{3}{8}-\left(\frac{-1}{8}\right)+\frac{2}{8}-\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{8}\right)=$

1.2 Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Rechenregel: Ungleichnamige Brüche müssen zunächst durch Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden. Anschließend addiert bzw. subtrahiert man die Brüche nach den oben stehenden Rechenregeln.

Beispiel: $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1\cdot 2}{4\cdot 2}-\frac{1}{8}=\frac{2}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$ (Hierbei wurde $\frac{1}{4}$ mit 2 auf $\frac{2}{8}$ erweitert!)

Übungsaufgaben: Berechnen und kürzen Sie Ihr Ergebnis vollständig.

3) $4-\frac{3}{4}=$

4) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$

5) $\frac{7}{8}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=$

1.3 Multiplikation eines Bruches mit einer Zahl

Rechenregel: Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem der Zähler mit der Zahl multipliziert wird. (Der Nenner bleibt dabei unverändert.)

Beispiel: $2 \cdot \frac{3}{11} = \frac{2 \cdot 3}{11} = \frac{6}{11}$

Übungsaufgaben: Berechnen und kürzen Sie Ihr Ergebnis vollständig.

6) $\frac{7}{3} \cdot 4 =$

7) $3 \cdot \frac{4}{9} =$

1.4 Multiplikation zweier Brüche

Rechenregel: Zwei Brüche werden multipliziert, indem die Zähler miteinander multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert werden.

Beispiel: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$

Übungsaufgaben: Berechnen und kürzen Sie Ihr Ergebnis vollständig.

8) $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} =$

9) $-\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} =$

1.5 Division zweier Brüche

Rechenregel: Man dividiert durch einen Bruch, indem mit dessen Kehrbruch multipliziert wird.

Beispiel: $\frac{3}{8} : \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$

Beachte: Auch die Division durch eine ganze Zahl kann so berechnet werden:

Beispiel: $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} : \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Übungsaufgaben: Berechnen und kürzen Sie Ihr Ergebnis vollständig.

10) $\frac{7}{3} : \frac{2}{3} =$

11) $\frac{3}{8} : 4 =$

Vermischte Übungsaufgaben zum Themenbereich Bruchrechnen:

12) Berechnen und kürzen Sie Ihr Ergebnis vollständig.

a) $4 \cdot \frac{3}{2} =$

b) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} =$

c) $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) : 3 =$

d) $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} : 3 =$

e) $1 - \frac{1}{4} : \frac{1}{2} =$

f) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \left[-\frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\right)\right] =$

13) Ordnen Sie die folgenden Brüche der Größe nach, beginnen Sie mit dem kleinsten Wert.
$\frac{13}{18}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{9}$

14) Bestimmen Sie rechnerisch die Zahl, die auf der Zahlengeraden genau in der Mitte zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{5}{4}$ liegt.

Lösung der Übungsaufgaben zum Themenbereich Bruchrechnen:

1) $\frac{3}{4}-\frac{5}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3-5+1}{4}=-\frac{1}{4}$

2) $\frac{3}{8}-\left(\frac{-1}{8}\right)+\frac{2}{8}-\left(\frac{3}{8}+\frac{7}{8}\right)=\frac{3-(-1)+2-(3+7)}{8}=\frac{3+1+2-3-7}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$

3) $4-\frac{3}{4}=\frac{16}{4}-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$

4) $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

5) $\frac{7}{8}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{21}{24}+\frac{36}{24}-\frac{8}{24}=\frac{21+36-8}{24}=\frac{49}{24}$

6) $\frac{7}{3}\cdot 4=\frac{7\cdot 4}{3}=\frac{28}{3}$

7) $3\cdot\frac{4}{9}=\frac{3\cdot 4}{9}=\frac{1\cdot 4}{3}=\frac{4}{3}$

8) $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}=\frac{4\cdot 6}{5\cdot 7}=\frac{24}{35}$

9) $-\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{3\cdot 4}{8\cdot 9}=-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}=-\frac{1}{6}$

10) $\frac{7}{3}:\frac{2}{3}=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

11) $\frac{3}{8}:4=\frac{3}{8}:\frac{4}{1}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

12a) $4\cdot\frac{3}{2}=\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=\frac{6}{1}=6$

12b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2-1}{6}=\frac{1}{6}$

12c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right):3=\left(\frac{4}{12}+\frac{9}{12}\right):\frac{3}{1}=\frac{13}{12}\cdot\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$

12d) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}:3=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}:\frac{3}{1}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

12e) $1-\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

12f) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left[-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left[-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left[-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right]=$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left[-\frac{2}{5}\right]=\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=\frac{5}{10}-\frac{6}{10}=\frac{5-6}{10}=-\frac{1}{10}$

13) Hauptnenner bilden: $\frac{1}{2}=\frac{9}{18}$; $\frac{2}{3}=\frac{12}{18}$; $\frac{13}{18}$; $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$; $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$

14) Mittelwert bilden: $\left(\frac{2}{5}+\frac{5}{4}\right):2=\left(\frac{8}{20}+\frac{25}{20}\right):\frac{2}{1}=\frac{33}{20}\cdot\frac{1}{2}=\frac{33}{40}$

2. Rechnen mit Wurzeln

Definition und Beispiele:

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = +\sqrt{9} \qquad x_2 = -\sqrt{9}$$

$$x_1 = +3 \qquad x_2 = -3$$

In Worten: Die Quadratwurzel aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ (z.B. $a = 9$) ist diejenige nicht-negative Zahl $\sqrt{a}$ (z.B. $\sqrt{9} = 3$), die mit sich selbst multipliziert wieder a ergibt (z.B. $3 \cdot 3 = 9$).

Folgerung: Es kann keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl geben!

Rechenregeln: $\sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{144} = 12$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$

$3 \cdot 4 = 12$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$

Allgemein gilt: $\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}}$ und $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$

Achtung: $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$

Folglich: $\boxed{\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}}$

Anwendungen:

- teilweises Radizieren (Wurzelziehen):

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

- Nenner rational machen:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vermischte Übungsaufgaben zum Themenbereich Rechnen mit Wurzeln:

1) Berechnen Sie beide Terme und vergleichen Sie deren Ergebnisse anschließend.

a) $\sqrt{4}+\sqrt{25}$; $\sqrt{4+25}$

b) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{9}$; $\sqrt{36\cdot 9}$

c) $\sqrt{64}-\sqrt{49}$; $\sqrt{64-49}$

2) Schreiben Sie die Terme als ganze Zahl.

a) $\sqrt{81}=$

b) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}=$

c) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2{,}5}}=$

3) Radizieren Sie so weit wie möglich teilweise.

a) $\sqrt{18}=$

b) $\sqrt{128}=$

c) $\sqrt{1210}=$

4) Machen Sie den Nenner rational und radizieren Sie ggf. so weit wie möglich teilweise.

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}=$

b) $\frac{4}{7\sqrt{2}}=$

c) $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{8}}=$

5) Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\sqrt{49}-\sqrt{225}+\sqrt{400}=$

b) $3\sqrt{3}-\sqrt{5}+7\sqrt{3}-2\sqrt{5}=$

c) $5\sqrt{48}+2\sqrt{27}=$

Lösung der Übungsaufgaben zum Themenbereich Rechnen mit Wurzeln:

1a) $\sqrt{4}+\sqrt{25}=2+5=7 \quad \neq \quad \sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

1b) $\sqrt{36}\cdot\sqrt{9}=6\cdot 3=18 \quad = \quad \sqrt{36\cdot 9}=\sqrt{324}=18$

1c) $\sqrt{64}-\sqrt{49}=8-7=1 \quad \neq \quad \sqrt{64-49}=\sqrt{15}$

2a) $\sqrt{81}=\sqrt{9\cdot 9}=9$

2b) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}=2\cdot 4=8$ alternativer Lösungsweg: $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}=\sqrt{4\cdot 16}=\sqrt{64}=8$

2c) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2{,}5}}=\sqrt{\frac{10}{2{,}5}}=\sqrt{\frac{40}{10}}=\sqrt{4}=2$

3a) $\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

3b) $\sqrt{128}=\sqrt{4\cdot 32}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 8}=\sqrt{4\cdot 4\cdot 4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

3c) $\sqrt{1210}=\sqrt{121\cdot 10}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{10}=11\sqrt{10}$

4a) $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

4b) $\frac{4}{7\sqrt{2}}=\frac{4}{7\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{7\cdot 2}=\frac{2\sqrt{2}}{7}$

4c) $\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{8}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\frac{3\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}=\frac{3\sqrt{10\cdot 8}}{8}=\frac{3\sqrt{2\cdot 5\cdot 2\cdot 4}}{8}=\frac{3\sqrt{4\cdot 4\cdot 5}}{8}=\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{5}}{8}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

5a) $\sqrt{49}-\sqrt{225}+\sqrt{400}=7-15+20=12$

5b) $3\sqrt{3}-\sqrt{5}+7\sqrt{3}-2\sqrt{5}=10\sqrt{3}-3\sqrt{5}$

5c) $5\sqrt{48}+2\sqrt{27}=5\sqrt{16\cdot 3}+2\sqrt{9\cdot 3}=5\cdot 4\sqrt{3}+2\cdot 3\sqrt{3}=20\sqrt{3}+6\sqrt{3}=26\sqrt{3}$

3. Rechnen mit Termen

3.1 Definition: Term

Ein Term besteht aus Zahlen und Variablen, die durch Rechenzeichen miteinander verknüpft sind.

Beispiele:

$\underbrace{a}_{\text{Variable}} + \underbrace{a}_{\text{Variable}} + \underbrace{a}_{\text{Variable}}$ oder kurz: $\underbrace{3}_{\text{Koeffizient}} \cdot \underbrace{a}_{\text{Variable}}$

4 ; x^2 ; $a^2 - 2ab + b^2$; $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3.2 Gleichartige und ungleichartige Terme

Terme, die sich nur in ihren Koeffizienten unterscheiden, heißen gleichartig.

Beispiele für gleichartige Terme:

$a;\ \ 3a;\ \ 0{,}5a$ oder $-3xy;\ \ 7xy$ oder $2b^2c^3;\ \ -0{,}1b^2c^3$

Beispiel für ungleichartige Terme:

$x;\ \ xy;\ \ x^2;\ \ x^3y$

3.3 Zusammenfassen von Termen

Addition und Subtraktion von gleichartigen Termen

Gleichartige Terme werden addiert (bzw. subtrahiert), indem man deren Koeffizienten addiert (bzw. subtrahiert).

Beispiele: $2a + 4a = (2 + 4) \cdot a = 6a$ $9a^2 - 2a^2 = (9 - 2) \cdot a^2 = 7a^2$

Achtung: Der Term $4a + 6a^2$ lässt sich nicht zusammenfassen!

Multiplikation von Termen

Terme werden multipliziert, indem man die Koeffizienten der Terme multipliziert und dann die Variablen multipliziert.

Beispiele: $4a \cdot 3a^2 = 4 \cdot 3 \cdot a \cdot a^2 = 12a^3$ $2 \cdot 5a = 5a + 5a = 10a$

Vorzeichenregel:

Bei der Multiplikation (bzw. Division) zweier Zahlen oder Variablen mit gleichem Vorzeichen erhält man als Ergebnis ein positives Produkt (bzw. einen positiven Quotienten).
Bei der Multiplikation (bzw. Division) zweier Zahlen oder Variablen mit unterschiedlichen Vorzeichen erhält man als Ergebnis ein negatives Produkt (bzw. einen negativen Quotienten).

Übungsaufgaben zum Themenbereich Rechnen mit Termen:

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

1) $7 + 3b - 4 + 5a + b - a =$

2) $5x + 2x^2 + 3x + 5 + 2 - 3x^2 =$

3) $-3x^2 \cdot (-5) \cdot (-2x) =$

4) $3x^2 \cdot (-4) - 5 \cdot 2x =$

5) $\left(0{,}3b - 2b + \frac{7}{10}b\right)(b + 4)(b^2 - 3b + 1) - 2(b^2 - 1) =$

6) $2 \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot 3b\right) + 3b \cdot [0{,}25b - (-2a)] =$

7) $(0{,}5y - 1)\left(-z + \frac{2}{3}y\right) - \frac{1}{3}(y - 2)y =$

Lösung der Übungsaufgaben zum Themenbereich Rechnen mit Termen:

1) $7 + 3b - 4 + 5a + b - a = 4a + 4b + 3$

2) $5x + 2x^2 + 3x + 5 + 2 - 3x^2 = -x^2 + 8x + 7$

3) $-3x^2 \cdot (-5) \cdot (-2x) = -30x^3$

4) $3x^2 \cdot (-4) - 5 \cdot 2x = -12x^2 - 10x$

5) $\left(0{,}3b - 2b + \frac{7}{10}b\right)(b + 4)(b^2 - 3b + 1) - 2(b^2 - 1) =$

$= (-b)(b^3 - 3b^2 + b + 4b^2 - 12b + 4) - 2b^2 + 2 =$

$= -b^4 + 3b^3 - b^2 - 4b^3 + 12b^2 - 4b - 2b^2 + 2 =$

$= -b^4 - b^3 - 9b^2 - 4b + 2$

6) $2 \cdot \left(\frac{1}{2}a \cdot 3b\right) + 3b \cdot [0{,}25b - (-2a)] = 3ab + 3b \cdot [0{,}25b + 2a] = 3ab + 0{,}75b^2 + 6ab =$

$= 9ab + 0{,}75b^2$

7) $(0{,}5y - 1)\left(-z + \frac{2}{3}y\right) - \frac{1}{3}(y - 2)y = -0{,}5yz + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}y^2 + z - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}y =$

$= -0{,}5yz + \frac{1}{3}y^2 + z - \frac{1}{3}y^2 = -0{,}5yz + z$

4. Rechnen mit Klammern

4.1 Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

Besteht bei einem Produktterm ein Faktor aus einer Summe, so wird jeder Summand mit dem Faktor multipliziert, der vor (oder auch hinter) der Klammer steht:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$ (Distributivgesetz)

Besitzt der Faktor vor der Klammer ein positives Vorzeichen, so ändern sich die Vorzeichen nicht, d.h. die Glieder der Klammer behalten ihre Vorzeichen. Steht vor der Klammer ein Minuszeichen, so ändern sich die Vorzeichen aller Glieder der Klammer bei ihrem Weglassen.

$$-a \cdot (b + c) = -a \cdot b - a \cdot c$$

Beispiel 1: $3(x + 3y) = 3 \cdot x + 3 \cdot 3y = 3x + 9y$

Beispiel 2: $-3(x + 3y) = -3 \cdot x - 3 \cdot 3y = -3x - 9y$

Übungsaufgaben: Multiplizieren Sie aus und fassen Sie anschließend zusammen.

1) $3x(x^2 + 2y) - 4y(2x + 3x^2)$
2) $-7x(x + 3y) + 15(-2x + 3y)$

Sind bei einem Produkt beide Faktoren Summen, so muss jeder Summand der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert werden:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Beispiel: $(3 + 3x) \cdot (4x + 4y) = 3 \cdot 4x + 3 \cdot 4y + 3x \cdot 4x + 3x \cdot 4y = 12x + 12y + 12x^2 + 12xy$

Übungsaufgaben: Multiplizieren Sie aus und fassen Sie anschließend zusammen.

3) $(4x + 2y)(3x - 2y)$
4) $(2x + 2y + 3)(4 - 2y + 3x)$

4.2 Faktorisieren (Ausklammern)

Besitzen alle Summanden eines Summenterms einen gemeinsamen Faktor, so kann dieser Faktor ausgeklammert werden:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

Beispiel 1: $tx + ty + tz = t(x + y + z)$

Beispiel 2: $pr - pt + qr + qt = p(r - t) + q(r + t)$

Übungsaufgaben: Faktorisieren Sie.

5) $10x^2 + 5xy - 15xz$
6) $u(z - v) + y(z - v)$
7) $3at - 5bt + 3as - 5bs$

Lösung der Übungsaufgaben zum Themenbereich Rechnen mit Klammern:

1) $3x^3 + 6xy - 8xy - 12x^2y = 3x^3 - 2xy - 12x^2y$

2) $-7x^2 - 21xy - 30x + 45y$

3) $12x^2 - 8xy + 6xy - 4y^2 = 12x^2 - 2xy - 4y^2$

4) $8x - 4xy + 6x^2 + 8y - 4y^2 + 6xy + 12 - 6y + 9x = 17x + 2xy + 6x^2 - 4y^2 + 2y + 12$

5) $5x(2x + y - 3z)$

6) $(z - v)(u + y)$

7) $t(3a - 5b) + s(3a - 5b) = (t + s)(3a - 5b)$

5. Gleichungen

5.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen können nach folgendem Schema gelöst werden:

1. Um die Lösungsmenge einer Gleichung zu bestimmen, formt man die Gleichung so um, dass auf einer Seite der Gleichung nur Terme mit der gesuchten Variablen (z.B. x) stehen.

Folgende Äquivalenzumformungen sind erlaubt:

- Auf beiden Seiten die gleichen Zahlen oder Terme addieren bzw. subtrahieren.
- Beide Seiten mit der gleichen Zahl oder dem gleichen Term ungleich 0 multiplizieren.
- Beide Seiten durch die gleiche Zahl oder den gleichen Term ungleich 0 dividieren.

2. Alle Terme ohne die Variable mithilfe von Äquivalenzumformungen auf die rechte Seite der Gleichung bringen
3. Wenn nötig, ausklammern der Variable auf der linken Seite.
4. Dann kann man durch den Koeffizienten der Variablen dividieren und muss überprüfen, ob die erhaltene Zahl für die gesuchte Variable in der Definitionsmenge enthalten ist.
5. Lösungsmenge angeben.

Beispiel in 5 Lösungsschritten:

1. $2x - 5 = 7 - 4x \quad | + 4x$
2. $6x - 5 = 7 \quad | + 5$
3. $6x = 12 \quad | : 6$
4. $x = 2$
5. $\mathbb{L} = \{2\}$

Übungsaufgaben:

1) Lösen Sie die linearen Gleichungen und geben Sie deren Lösungsmenge an. Für alle Gleichungen gilt: Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

a) $2x - 16 = 11 - 7x$

b) $5x + 1 = 8 + 5x$

c) $2(x + 5) - 2 = 2x + 8$

d) $\frac{1}{2}x - 4 = 4x - 17 - \frac{3}{2}x$

2) Lösen Sie die Zahlenrätsel, indem Sie zunächst eine lineare Gleichung aufstellen und diese anschließend lösen.

a) Multipliziert man eine Zahl mit -12 und subtrahiert anschließend 16, so erhält man -160.

b) Wenn man zur Hälfte einer Zahl um 6 vergrößert, so erhält man das dreifache der Zahl.

3) Geben Sie begründet an, wie sich die Lösung der linearen Gleichung $2x + a = 4$ mit der Variablen x und der Zahl $a \in \mathbb{R}$ verändert, wenn a vergrößert wird.

5.2 Quadratische Gleichungen

Eine allgemeine quadratische Gleichung kann durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Form gebracht werden: $ax^2 + bx + c = 0$, mit $a; b; c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Je nachdem, welche Werte die Koeffizienten b und c annehmen, können verschiedene Lösungsmethoden zielführend angewandt werden.

1. Lösen durch Ausklammern, falls $c = 0$:

Beispiel: $x^2 + 2x = 0$

$$x(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$$

$x_1 = 0$ und $x_2 = -2$

$\mathbb{L} = \{-2; 0\}$

Hinweis: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

2. Lösen durch Radizieren (Wurzelziehen), falls $b = 0$:

Beispiel 1: $5x^2 - 35 = 0$

$5x^2 = 35$

$x^2 = 7$ $\quad$ ($x^2 > 0 \Longrightarrow$ zwei verschiedene Lösungen)

$x_1 = \sqrt{7}$ und $x_2 = -\sqrt{7}$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$

Beispiel 2: $6x^2 = 0$

$x^2 = 0$ $\quad$ ($x^2 = 0 \Longrightarrow$ eine doppelte Lösung)

$x_{1/2} = 0$

$\mathbb{L} = \{0\}$

Beispiel 3: $7x^2 + 14 = 0$

$7x^2 = -14$

$x^2 = -2$ $\quad$ ($x^2 < 0 \Longrightarrow$ keine Lösung)

$\mathbb{L} = \{\,\}$

3. Lösen mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen, falls $b \neq 0$ und $c \neq 0$:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Term unter der Wurzel, $\mathbf{b^2 - 4ac}$, heißt Diskriminante $\mathbf{D}$ und gibt an, ob die quadratische Gleichung keine, eine oder zwei Lösungen besitzt, es gilt:

$D > 0 \quad \Longrightarrow$ zwei verschiedene Lösungen

$D = 0 \quad \Longrightarrow$ eine doppelte Lösung

$D < 0 \quad \Longrightarrow$ keine Lösung

Beispiel 1: $3x^2 + x + 6 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3}$

$D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -71 < 0$ ⟹ keine Lösung

$\mathbb{L} = \{\ \}$

Beispiel 2: $2x^2 - 20x + 50 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50}}{2 \cdot 2}$

$D = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50 = 0$ ⟹ eine doppelte Lösung

$x_{1/2} = \frac{+20 \pm \sqrt{0}}{4} = 5$

$\mathbb{L} = \{5\}$

Beispiel 3: $-8x^2 + 10x - 2 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-8)}$

$D = 10^2 - 4 \cdot (-8) \cdot (-2) = 36$ ⟹ zwei verschiedene Lösungen

$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{36}}{-16} = \frac{-10 + 6}{-16} = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{-10 - \sqrt{36}}{-16} = \frac{-10 - 6}{-16} = 1$

$\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{4}; 1\right\}$

Übungsaufgaben:

4) Lösen Sie die quadratischen Gleichungen und geben Sie deren Lösungsmenge an. Für alle Gleichungen gilt: Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

a) $2x^2 - 14 = 11 - 10x$

b) $3x^2 - \frac{4}{3} = 0$

c) $-x^2 + 2x = 2$

d) $2x^2 + 722 = 76x$

5) Lösen Sie die Zahlenrätsel, indem Sie zunächst eine quadratische Gleichung aufstellen und diese anschließend lösen.

a) Multipliziert man eine Zahl mit der Hälfte dieser Zahl, so erhält man 242.

b) Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist um 55 größer als ihre Summe. Geben Sie an, um welche beiden natürlichen Zahlen es sich hierbei handelt.

Lösung der Übungsaufgaben zum Themenbereich Gleichungen:

1a) $\mathrm{x} = 11 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \{11\}$

1b) $1 = 8$ falsche Aussage $\quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \{\,\}$

1c) $0 = 0$ wahre Aussage $\quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \mathrm{G} = \mathbb{R}$

1d) $\mathrm{x} = \frac{13}{2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{\frac{13}{2}\right\}$

2a) Gleichung: $\mathrm{x} \cdot (-12) - 16 = -160 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{x} = 12$

2b) Gleichung: $\frac{1}{2}\mathrm{x} + 6 = 3\mathrm{x} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{12}{5} = 2{,}4$

3) Löst man die Gleichung nach x auf, so erhält man $\mathrm{x} = 2 - \frac{\mathrm{a}}{2}$. Wird nun a vergrößert, so verkleinert sich der Wert von x.

4a) Gleichung: $2\mathrm{x}^2 + 10\mathrm{x} - 25 = 0 \quad \Longrightarrow \mathrm{D} = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-25) = 300 > 0$

$$\mathrm{x}_1 = \frac{-10+\sqrt{300}}{2\cdot 2} = \frac{-10+10\sqrt{3}}{4} = \frac{-5+5\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}83$$

$$\mathrm{x}_2 = \frac{-10-\sqrt{300}}{2\cdot 2} = \frac{-10-10\sqrt{3}}{4} = \frac{-5-5\sqrt{3}}{2} \approx -6{,}83$$

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{-5-5\sqrt{3}}{2}; \frac{-5+5\sqrt{3}}{2}\right\}$$

4b) $\mathrm{x}_1 = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$ und $\mathrm{x}_2 = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}$

4c) $-\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \mathrm{D} = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = -4 < 0 \quad \Longrightarrow \mathbb{L} = \{\,\}$

4d) $2\mathrm{x}^2 - 76\mathrm{x} + 722 = 0 \quad \Longrightarrow \mathrm{D} = (-76)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 722 = 0$

$$\mathrm{x}_{1/2} = \frac{-(-76)\pm\sqrt{0}}{2\cdot 2} = \frac{76}{4} = 19$$

$$\mathbb{L} = \{19\}$$

5a) Gleichung: $\mathrm{x} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{x} = 242 \quad \Longrightarrow \mathrm{x}^2 = 484 \qquad \mathrm{x}_1 = -\sqrt{484} = -22$ und $\mathrm{x}_2 = \sqrt{484} = 22$

5b) Gleichung: $\mathrm{x} \cdot (\mathrm{x}+1) = \mathrm{x} + (\mathrm{x}+1) + 55 \quad \Longrightarrow \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 56 = 0$

$$\Longrightarrow \mathrm{D} = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 225$$

$\mathrm{x}_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{225}}{2\cdot 1} = \frac{1+15}{2} = 8 \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{x}_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{225}}{2\cdot 1} = \frac{1-15}{2} = -7 \notin \mathbb{N}$

Die beiden gesuchten natürlichen Zahlen sind demnach 8 und 9.

6. Lineare Funktionen

6.1 Zeichnen von Graphen linearer Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Geraden f lautet:

$$\boxed{\mathrm{f}: \mathrm{x} \mapsto \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{m} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{t} \quad \text{mit} \quad \mathrm{m}; \mathrm{t} \in \mathbb{R}}$$

Dabei ist **m** die **Steigung** der Geraden f und **t** der **y-Achsenabschnitt**.

Dabei gilt: $\mathrm{m} > 0 \quad \Longrightarrow$ Die Gerade steigt.

$\mathrm{m} = 0 \quad \Longrightarrow$ Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse.

$\mathrm{m} < 0 \quad \Longrightarrow$ Die Gerade fällt.

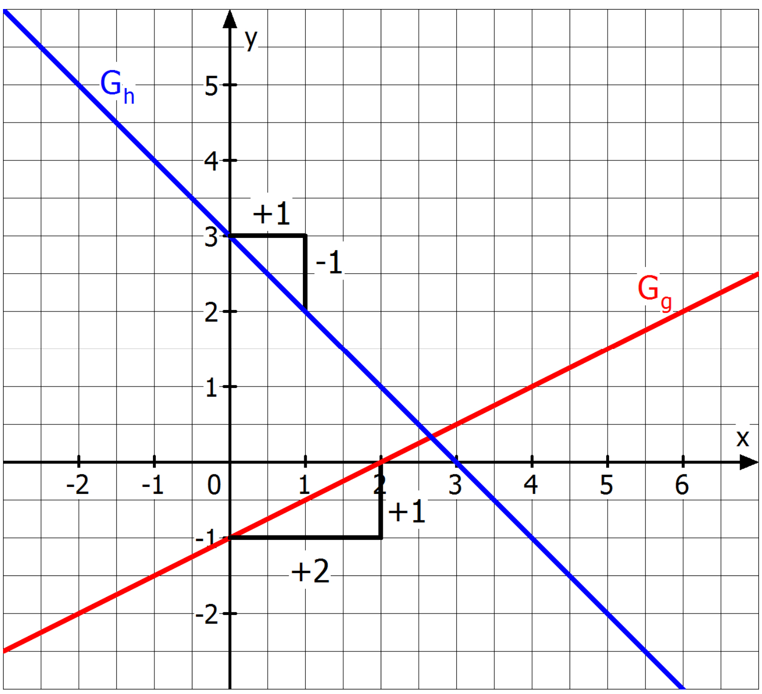
Vorgehensweise beim Zeichnen des Graphen einer linearen Funktion:

1. Einzeichnen des Schnittpunktes S_y der Geraden mit der y-Achse. Für diesen gilt $S_y\ (0|t)$ und dieser ist bereits durch den **y-Achsenabschnitt t** bekannt.
2. Ausgehend von diesem Punkt zeichnen Sie die **Steigung m** mithilfe des Steigungsdreiecks ein. Am einfachsten ist dieses Steigungsdreieck zu zeichnen, indem m als Bruch dargestellt wird. Der Nenner entspricht der „Strecke" in x-Richtung, der Zähler der „Strecke" in y-Richtung.

Beispiel:

Zeichnen Sie die Graphen der linearen Funktionen g und h mit den Gleichungen $\mathrm{g}: \mathrm{y} = \frac{1}{2}\mathrm{x} - 1$ und $\mathrm{h}: \mathrm{y} = -\mathrm{x} + 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

Lösung:



6.2 Aufstellen von Geradengleichungen

Eine Gerade ist durch die Angabe

- von **zwei** verschiedenen **Punkten** $P\ (x_1|y_1)$ und $Q\ (x_2|y_2)$ oder
- durch **einen Punkt** und die **Steigung** der Geraden

eindeutig festgelegt.

Sind zwei verschiedene Punkte einer Geraden bekannt, lässt sich

1. die **Steigung m** berechnen. Es gilt:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

2. Anschließend berechnet man den **y-Achsenabschnitt t** unter Zuhilfenahme der allgemeinen Funktionsgleichung $y = m \cdot x + t$.
   Die berechnete **Steigung m** sowie die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden werden in die allgemeine Funktionsgleichung eingesetzt und anschließend nach **t** aufgelöst.

Beispiel:
Eine Gerade g verläuft durch die Punkte $P\ (-3|5)$ und $Q\ (1|4)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Geraden g.

Lösung:

1. Berechnung der Steigung m:

$m = \frac{4-5}{1-(-3)} = -\frac{1}{4}$ alternativ: $m = \frac{5-4}{-3-1} = -\frac{1}{4}$

Merke: Es ist beliebig, welchen der Punkte man als ersten bzw. als zweiten Punkt einsetzt.

2. Berechnung des y-Achsenabschnitts:

Die berechnete Steigung m sowie einen beliebigen Punkt (hier: Q) in die allgemeine Funktionsgleichung $y = m \cdot x + t$ einsetzen:

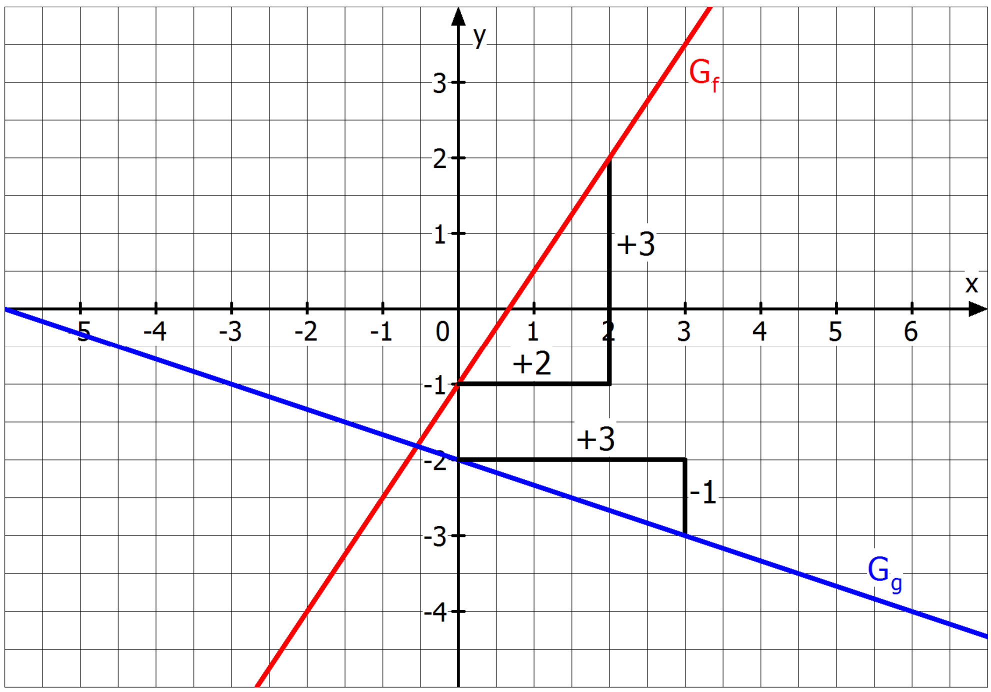
$$4 = -\frac{1}{4} \cdot 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad 4 = -\frac{1}{4} + t \quad \Leftrightarrow \quad t = 4{,}25$$

$$\Rightarrow \quad g\colon y = -\frac{1}{4} \cdot x + 4{,}25$$

6.3 Graphische Bestimmung von Geradengleichungen

Zum Ablesen einer Geradengleichung aus einem Schaubild liest man zunächst den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse (**y-Achsenabschnitt**) ab. Beim Ablesen der **Steigung m** der Geraden wählt man das Steigungsdreieck möglichst so, dass der Unterschied in x-Richtung $(x_2 - x_1)$ und der Unterschied in y-Richtung $(y_2 - y_1)$ ganzzahlig sind.

Beispiel:
Geben Sie die Gleichung der gezeichneten Geraden g und h an.



Lösung:

Gerade f: Der y-Achsenabschnitt der Geraden f ist -1. Das Steigungsdreieck von f ist $+2$ Längeneinheiten in x-Richtung und $+3$ Längeneinheiten in y-Richtung. Dies entspricht einer Steigung von $\frac{3}{2}$.

$$\Rightarrow f: y = \frac{3}{2}x - 1$$

Gerade g: Der y-Achsenabschnitt der Geraden g ist -2. Das Steigungsdreieck von g ist $+3$ Längeneinheiten in x-Richtung und -1 Längeneinheiten in y-Richtung. Dies entspricht einer Steigung von $-\frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow g: y = -\frac{1}{3}x - 2$$

Vermischte Übungsaufgaben zum Themenbereich lineare Funktionen:

1) Zeichnen von Geraden:

Gegeben sind folgende Geradengleichungen. Zeichnen Sie die zugehörigen Geraden in ein kartesisches Koordinatensystem.

a) $\mathrm{f}: \mathrm{y} = -\frac{1}{4}\mathrm{x} + 2$ **b)** $\mathrm{g}: \mathrm{y} = \frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{5}{2}$ **c)** $\mathrm{h}: \mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 4$

2) Aufstellen von Geradengleichungen:

a) Eine Gerade f verläuft durch die Punkte $\mathrm{A}\ (2|-1)$ und $\mathrm{B}\ (-3|-5)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden f.

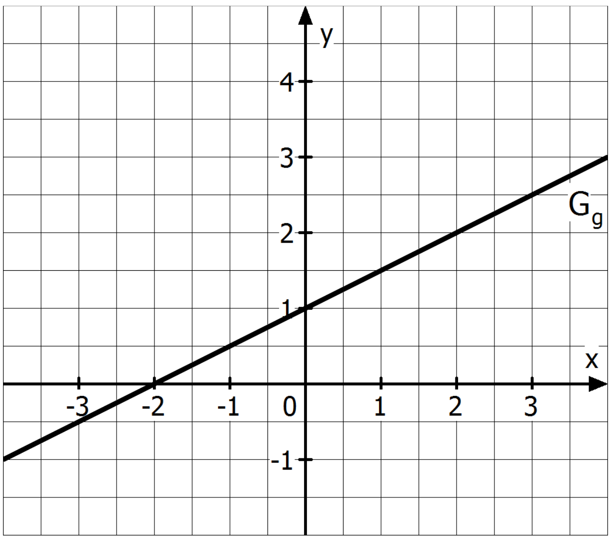
b) Eine Gerade g verläuft parallel zur Geraden i mit der Gleichung $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 1$ und geht durch den Punkt $\mathrm{F}\ (2|1)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g.

c) Eine Gerade h verläuft senkrecht zur Geraden i mit der Gleichung $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} - 1$ und geht durch den Punkt $\mathrm{F}\ (2|1)$. Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h.

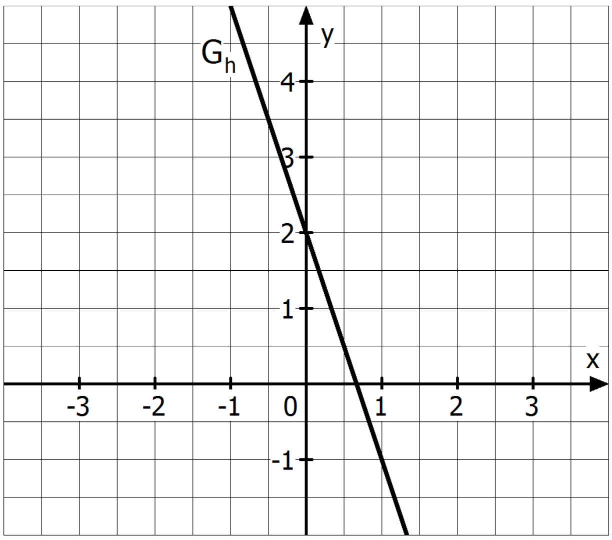
3) Zeichnerische Bestimmung von Geradengleichungen:

Geben Sie die Gleichungen der gezeichneten Geraden an.

a)

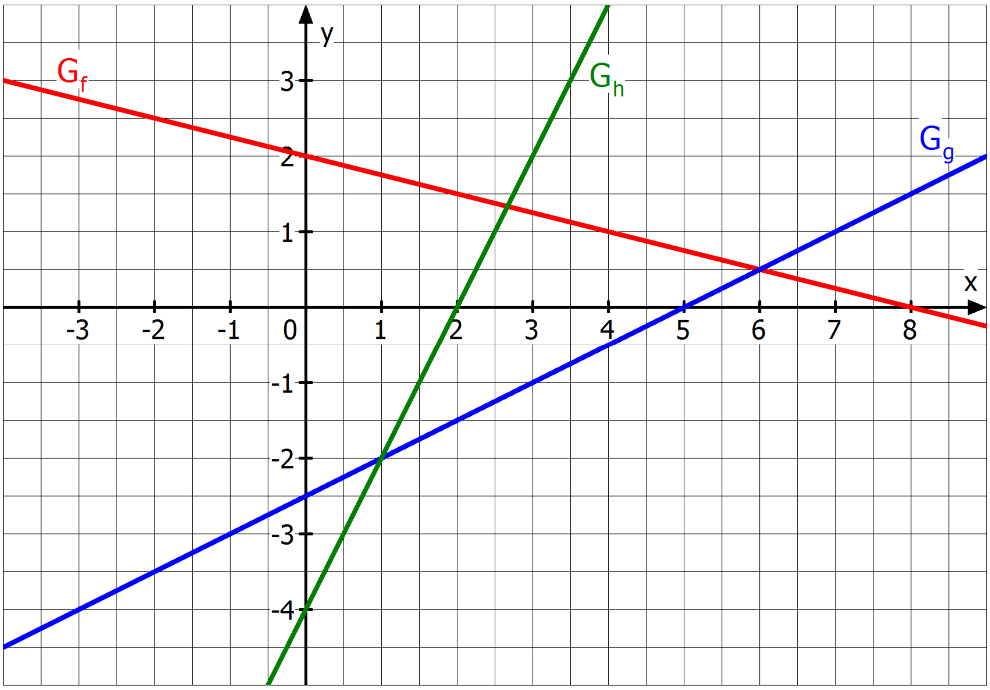


b)



<u>Lösung der Übungsaufgaben zum Themenbereich lineare Funktionen:</u>

1)



2a) $f\colon y = \frac{4}{5}x - \frac{13}{5}$

2b) $g\colon y = 2x - 3$

Merke: Parallele Geraden besitzen dieselbe Steigung!

2c) $h\colon y = -\frac{1}{2}x + 2$

Merke: Für die Steigungen zweier senkrecht aufeinander stehender Geraden gilt:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

3a) $g\colon y = \frac{1}{2}x + 1$

3b) $h\colon y = -3x + 2$

7. Quadratische Funktionen

7.1 Zeichnen von Graphen quadratischer Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Parabel lautet:

$$\boxed{f: x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad b; c \in \mathbb{R}}$$

Dabei ist **a** der **Formparameter** der Parabel f. a gibt an, wohin die Parabel f geöffnet ist und um welche Art der Parabel es sich handelt:

$a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet.

$a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet.

$|a| = 1$: Es handelt sich um eine Normalparabel.

$|a| > 1$: Die Parabel ist in y-Richtung gestreckt.

$|a| < 1$: Die Parabel ist in y-Richtung gestaucht.

Es gibt zwei weitere Darstellungsformen der quadratischen Funktionsgleichung:

Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$ mit dem Scheitelpunkt $S\,(x_S|y_S)$

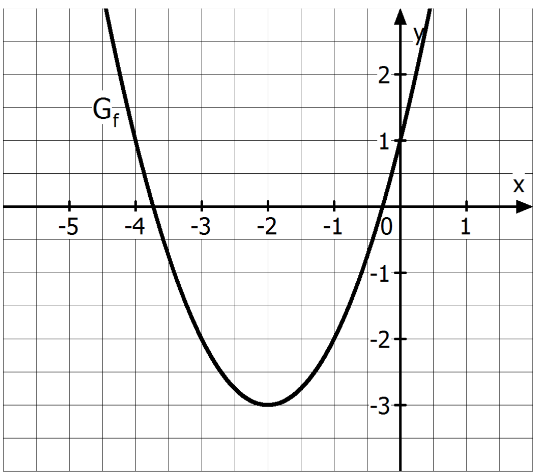
Linearfaktorform: (Produktform) $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ mit den Nullstellen $N_1\,(x_1|0)$ und $N_2\,(x_2|0)$

Um die Koordinaten des Scheitelpunktes bestimmen zu können, muss die allgemeine Form mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform überführt werden.

Beispiel 1: Bestimmen Sie mithilfe der quadratischen Ergänzung die Scheitelpunktform der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + 4x + 1$ und zeichnen Sie deren Graphen G_f anschließend.

Lösung 1:

$$f(x) = x^2 + 4x \underbrace{+2^2 - 2^2}_{=0} + 1 = \underbrace{(x^2 + 4x + 2^2)}_{\text{binomische Formel}} - 2^2 + 1 = (x+2)^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad S\,(-2|-3)$$



Da der Koeffizient von x^2 (also der **Formparameter a**) „1“ ist, handelt es sich hier um eine nach oben geöffnete Normalparabel.

Beispiel 2: Bestimmen Sie mithilfe der quadratischen Ergänzung die Scheitelpunktform der Funktion g mit dem Funktionsterm $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$ und zeichnen Sie deren Graphen G_g anschließend.

Lösung 2:

Hier ist der Formparameter $a = -2$, daher muss vor der quadratischen Ergänzung zuerst -2 ausgeklammert werden.

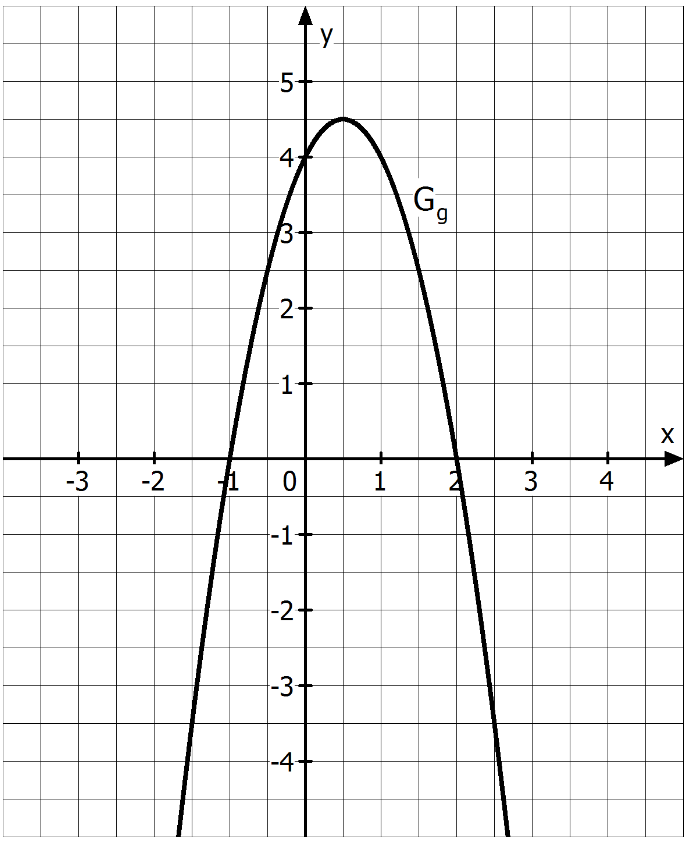
$$g(x) = -2(x^2 - x - 2) = -2(x^2 - x + 0{,}5^2 - 0{,}5^2 - 2) = -2[(x - 0{,}5)^2 - 2{,}25] =$$

$$= -2(x - 0{,}5)^2 + 4{,}5 \quad \Longrightarrow \quad S\,(0{,}5|4{,}5)$$

Da der Formparameter a eine negative Zahl ist und $|a| > 1$ gilt, ist die Parabel nach unten geöffnet und in y-Richtung gestreckt.

Wertetabelle:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
$g(x)$	$-3{,}5$	0	$2{,}5$	4	$4{,}5$	4	$2{,}5$	0	$-3{,}5$



7.2 Berechnung der Nullstellen

Als Nullstelle bezeichnet man den x-Wert des Schnittpunktes eines Graphen einer Funktion mit der x-Achse. Die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse lauten: $\mathrm{N}\ (x_N|0)$.

Zur rechnerischen Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f wird zunächst der Funktionsterm $f(x)$ gleich Null gesetzt und anschließend die erhaltene Gleichung gelöst.

Ist die Parabelgleichung in allgemeiner Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gegeben bzw. die gegebene Gleichung in diese Form umgestellt worden, kann nachdem der Funktionsterm gleich Null gesetzt wurde, die Lösungsformel für quadratische Gleichungen („Mitternachtsformel") zur Berechnung der Nullstellen verwendet werden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ entscheidet mit ihrem Vorzeichen über die Existenz und Anzahl der vorhandenen Nullstellen:

$D > 0$: Die Parabel besitzt zwei einfache Nullstellen: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$D = 0$: Die Parabel besitzt eine doppelte Nullstele: $x_{1/2} = -\frac{b}{2a}$

$D < 0$: Die Parabel besitzt keine Nullstelle.

Beispiel 1:
Gegeben ist die Parabel f durch $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$. Berechnen Sie die Nullstellen der Parabel f.

Lösung 1:
Zunächst wird der Funktionsterm $f(x)$ gleich Null gesetzt. Anschließend erfolgt die Berechnung der Nullstellen mithilfe „Mitternachtsformel":

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 3}{1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-1+3}{1} = 2 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-1-3}{1} = -4$$

$$\Rightarrow \ N_1\ (2|0);\ N_2(-4|0)$$

Sind die Nullstellen einer Funktion bekannt, kann der Funktionsterm in Linearfaktoren zerlegt werden und die Linearfaktorform des Funktionsterms angegeben werden.

Die **Linearfaktorform** lautet in diesem Fall: $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+4)$.

Beispiel 2:
Gegeben ist die Parabel p durch $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$. Berechnen Sie die Nullstellen der Parabel p.

Lösung 2:

$$p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-5)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}}{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ Die Parabel p besitzt keine Nullstellen, da $D = -1 < 0$ gilt.

Besitzt der Graph einer quadratischen Funktion keine Nullstellen, so kann der Funktionsterm auch nicht in Linearfaktoren zerlegt und somit keine Linearfaktorform angegeben werden.

7.3 Aufstellen von Parabelgleichungen

Eine Parabel ist durch die Angabe des Scheitelpunktes $S\ (x_S|y_S)$ und eines weiteren von S verschiedenen Punktes P eindeutig festgelegt.

Beispiel:
Gesucht ist eine Funktionsgleichung der Parabel p, die den Scheitelpunkt bei $S\ (1|4)$ besitzt und durch den Punkt $P\ (3|0)$ verläuft.

Lösung:

1. Ansatz: **Scheitelpunktform:** $p(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

2. Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunktes: $p(x) = a(x - 1)^2 + 4$

3. P einsetzen und a bestimmen:

$$0 = a(3 - 1)^2 + 4$$
$$0 = 4a + 4$$
$$4a + 4 = 0 \qquad | - 4$$
$$4a = -4 \qquad | : 4$$
$$a = -1$$

4. Funktionsterm angeben:

Scheitelpunktform: $p(x) = -(x - 1)^2 + 4$

allgemeine Form: $p(x) = -x^2 + 2x + 3$

7.4 Überblick über die verschiedenen Darstellungsformen

allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$x_S = -\frac{b}{2a}$

$y_S = f(x_S)$

Ausmultiplizieren, Vereinfachen

Ausmultiplizieren, Vereinfachen

Nullstellen x_1, x_2 berechnen und einsetzen, falls diese vorhanden sind.

$x_{1/2} = x_S \pm \sqrt{-\frac{y_S}{a}}$

falls $-\frac{y_S}{a} > 0$ gilt.

Scheitelpunktform:
$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$

Linearfaktorform (Produktform):
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$y_S = f(x_S)$

Vermischte Übungsaufgaben zum Themenbereich quadratische Funktionen:

1) Zeichnen der Graphen quadratischer Funktionen:

Gegeben sind folgende quadratische Funktionen. Zeichnen Sie die zugehörigen Graphen in ein kartesisches Koordinatensystem.

a) $f(x) = x^2 + x - 3$ **b)** $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 1$ **c)** $h(x) = 2x^2 - 8x + 3$

2) Berechnung der Nullstellen und Koordinaten des Scheitelpunktes

Bestimmen Sie – wenn möglich – die Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit der x-Achse und die Koordinaten des Scheitelpunktes der folgenden quadratischen Funktionen:

a) $f(x) = -x^2 - 5x - 4$ **b)** $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 3$ **c)** $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2}$

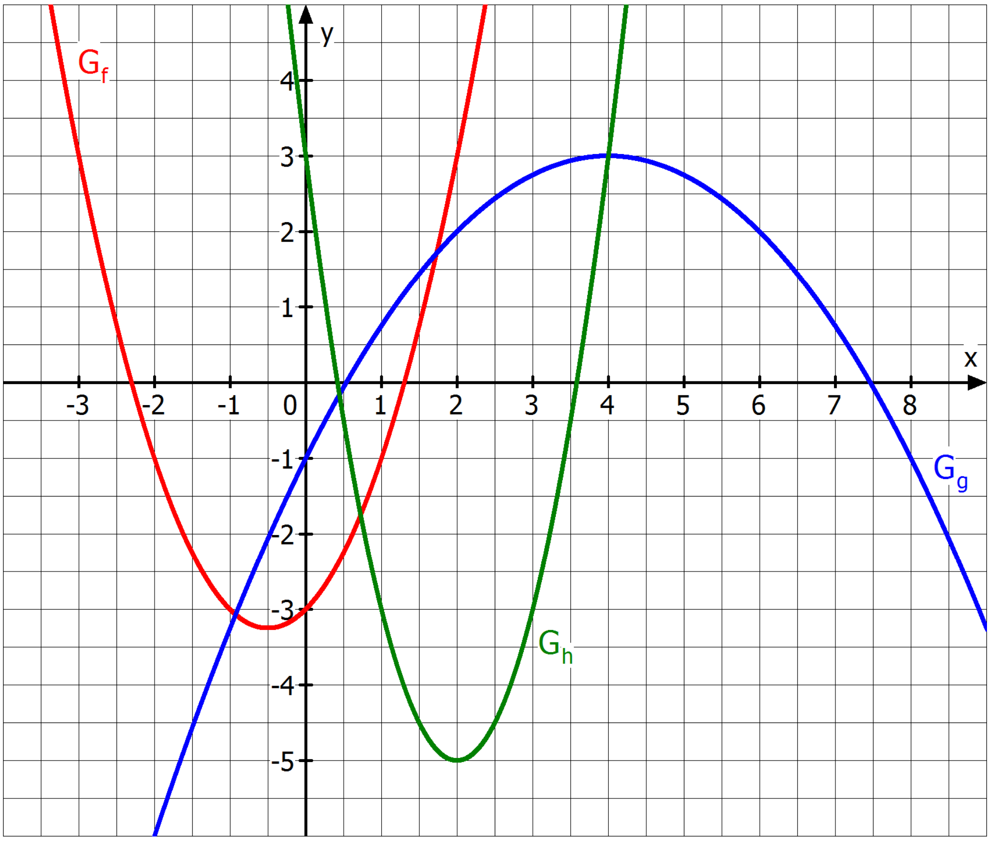
3) Aufstellen von Parabelgleichungen

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p, die den Scheitelpunkt bei $S\,(3|-2{,}5)$ besitzt und durch den Punkt $P\,(6|2)$ verläuft, sowohl in der Scheitelpunktform als auch in der allgemeinen Form.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel q, die den Scheitelpunkt bei $S\,(-0{,}5|1{,}5)$ besitzt und durch den Punkt $P\,(0|1)$ verläuft, sowohl in der Scheitelpunktform als auch in der allgemeinen Form.

Lösung der Übungsaufgaben zum Themenbereich quadratische Funktionen:

1)



2a) Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1\ (-1|0), N_2\ (-4|0)$

Scheitelpunkt $S\ (-2{,}5|2{,}25)$

2b) Schnittpunkte mit der x-Achse: keine, da $D = -2 < 0$

Scheitelpunkt $S\ (2|-2)$

2c) Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1\ \left(1 + 2\sqrt{2}\middle|0\right), N_2\ \left(1 - 2\sqrt{2}\middle|0\right)$

Scheitelpunkt $S\ (1|-4)$

3a) $p(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2{,}5 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

3b) $q(x) = -2(x+0{,}5)^2 + 1{,}5 = -2x^2 - 2x + 1$